باب 6

بولین الجبرا

(Boolean Algebra)

6.1 تعارف (Introduction)

بولین الجبرا کا تعلق منطق سے ہے۔ یہ منطقی بیانات کی نمائندگی کے لیے الفاظ کی بجائے علامتوں کو استعمال کرتا ہے۔ بولین الجبرا کو انگریز ریاضی دان جارج بولی نے 1854ء میں بنایا۔ بولین الجبرا علامتوں کو استعمال کرنے کے قوانین پر مشتمل ہے۔ بولین الجبرا کا بھی بالکل وہی مقام ہے جو کہ پراپوزیشنل کیلکولس کا۔ بولین الجبرا کا سب سے اہم استعمال ڈیجیٹل منطق میں ہے۔

کمپیوٹر چپس ٹرانزسٹرز سے بنائے جاتے جو کہ منطقی گیٹس پر مشتمل ہوتے ہیں۔ ہر گیٹ ایک سادہ منطقی عمل کو انجام دیتا ہے۔ کمپیوٹر الیکٹریکل پلسز (Pulses) کو پروسیس کرتے ہوئے اپنے پروگرام میں منطقی عوامل (ایسے بیانات جن کی ٹروتھ ویلیو ہو) کو پروسیس کرتا ہے۔ خاص سرکٹ کا ڈیزائن منطقی بیانات کے سیٹ پر واقع ہوتا ہے۔ یہ بیانات بولین الجبرا کی علامات میں تبدیل ہو سکتے ہیں۔ الجبری بیانات کو الجبرا کے قوانین کے مطابق مختصر کیا جاسکتا ہے اور ایک سادہ سرکٹ ڈیزائن میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ بولین الجبرا نتائج کو صحیح یا غلط یعنی بالترتیب ایک یا صفر کی شکل میں ظاہر کرتا ہے۔ مثال کے طور پر درج ذیل بیانات پر غور کیجیے۔

(I)	میں پاکستانی ہوں	1
(II)	2+2=5	0
(III)	لاہور پاکستان کا دارالخلافہ ہے	0
(IV)	5+1=6	1

ان میں سے ہر بیان صحیح ہے یا غلط۔ ایسے بیانات کو پراپوزیشنز کہتے ہیں۔ جملہ ''آپ کا کیا نام ہے'' پراپوزیشن نہیں ہے کیونکہ اس کی کوئی ٹروتھ ویلیو Truth-Value یعنی صحیح یا غلط نہیں ہے۔

ہم درج ذیل طریقہ سے دو پراپوزیشنوں کو ملا کر ایک نئی پراپوزیشن بنا سکتے ہیں۔

فرض کیا

اسلام آباد پاکستان کا دارالخلافہ ہے =p

اور

سیالکوٹ پنجاب کا سب سے بڑا شہر ہے =q

یہاں p صحیح ہے اور q غلط ہے۔

اب p اور q کو استعمال کرتے ہوئے ایک نئی پراپوزیشن، بناتے ہیں۔

t = (اسلام آباد پاکستان کا دارالخلافہ ہے۔) اور (سیالکوٹ پنجاب کا سب سے بڑا شہر ہے۔)

یا ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$t = p \text{ AND } q$$

یہ پراپوزیشن r غلط ہے کیونکہ q غلط ہے اور r کے درست ہونے کے لیے p اور q دونوں کو درست ہونا چاہیے۔

اس طرح فرض کریں کہ

$r = p \text{ OR } q$

بلاشبہ پراپوزیشن r صحیح ہے کیونکہ p صحیح ہے۔

ہر پراپوزیشن p کے ساتھ ہم ایک اور پراپوزیشن q کو درج ذیل طریقہ سے بھی بنا سکتے ہیں۔

فرض کریں

p = اسلام آباد پاکستان کا دارالخلافہ ہے

تب درج ذیل طریقہ سے ایک نئی پراپوزیشن q بنائیے۔

q= NOT (اسلام آباد پاکستان کا دارالخلافہ ہے)

ہم لکھ سکتے ہیں:

q = یہ صحیح نہیں ہے کہ اسلام آباد پاکستان کا دارالخلافہ ہے

q نفی ہے p کی اور اس خیال کو بیان کرنے کے لیے ہم لکھتے ہیں:

NOT (p) غلط ہوگا اگر p درست ہوگا اور اگر p غلط ہے تب NOT(p) درست ہوگا۔

پس ہمارے پاس درج ذیل اہم نقاط ہیں۔

- ☆ ہر پراپوزیشن صحیح ہے یا غلط۔
- ☆ ہمارے پاس دو پراپوزیشنوں کو ملا کر نئی پراپوزیشن بنانے کے دو طریقے (OR اور AND) ہیں۔
- ☆ ہر پراپوزیشن p کی نفی NOT (p) ہے۔

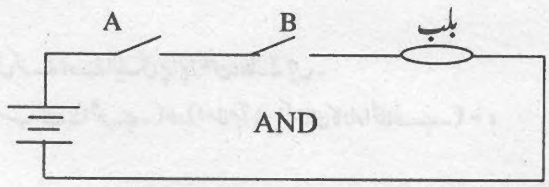
جارج بولی حقیقتاً ایسے ہی منطقی جملوں کے سسٹم کو ریاضی کی شکل میں نمائندگی دینے میں دلچسپی رکھتا تھا۔

آئیے اب ایک اور سسٹم پر غور کریں۔ ہم جانتے ہیں کہ تمام برقی آلات سوئچوں کے سرکٹس (ٹرانزسٹرز) پر مشتمل ہوتے ہیں۔

ایک سوئچ ہر وقت دونوں میں سے کسی ایک مقام ON یا OFF پر ہوتا ہے۔ ہم دو سوئچوں A اور B کو درج ذیل دو طریقوں (سیریز اور متوازی) سے ملا سکتے ہیں۔

سیریز (Series)

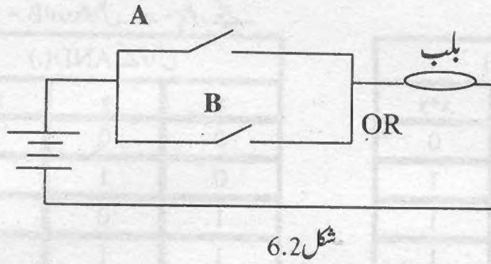
ہم دو سوئچوں A اور B کو ایک سیریز میں ترتیب دے سکتے ہیں۔ جیسا کہ شکل 6.1 میں دکھایا گیا ہے۔ اگر دونوں بٹن ON ہوں تو بلب ON ہو جائے گا ورنہ بلب بجھ جائے گا۔



شکل 6.1

متوازی (Parallel)

ہم دو سوئچوں A اور B کو متوازی ترتیب دے سکتے ہیں، جیسا کہ شکل 6.2 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 6.2

اگر دونوں سوئچوں میں سے ایک سوئچ ON ہو تو بلب ON ہو جائے گا ورنہ بلب بجھ جائے گا۔ سیریز سرکٹ کو (.) آپریٹر اور متوازی سرکٹ کو (+) آپریٹر سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس کی وضاحت درج ذیل ٹیبلز میں کی گئی۔

AND(.) کے آپریشنز		
سوئچ B	سوئچ A	بلب
OFF	OFF	OFF
ON	OFF	OFF
OFF	ON	OFF
ON	ON	ON
سیریل سرکٹ		

OR(+) کے آپریشنز		
سوئچ B	سوئچ A	بلب
OFF	OFF	OFF
ON	OFF	ON
OFF	ON	ON
ON	ON	ON
متوازی سرکٹ		

ہم ان سرکٹس کو A.B اور A + B کی شکل کے جملوں میں بھی لکھ سکتے ہیں، جنہیں بالترتیب A ڈاٹ B اور A پلس B پڑھتے ہیں۔

6.2 بولین الجبرا (Boolean Algebra)

دو مقداری (Two valued) بولین الجبرا ایک سیٹ ہے جس کے دو ارکان اور دو آپریشنز . اور + جو کہ سیٹ پر تعریف شدہ ہوتے ہیں، درج ذیل شرائط پوری کرتے ہیں۔

بندش: سیٹ B . اور + کے تحت خاصیت بندش رکھتا ہے۔

مبادلہ: a اور b کسی سیٹ کے ارکان کے لیے . اور + دونوں کے تحت خاصیت مبادلہ رکھنے سے مراد ہے کہ

a+b = b+a اور a.b = b.a

تلازم: . اور + کے تحت خاصیت تلازم رکھنے سے مراد ہے کہ اگر a, b اور c سیٹ B کے کوئی سے تین ارکان ہوں تو

a+(b+c) = (a+b)+c اور a.(b. c) = (a.b).c

تقسیمی: . خاصیت تقسیمی رکھتا ہے + پر اور + خاصیت تقسیمی رکھتا ہے . پر۔

اگر a, b اور c سیٹ B سے تین متغیرات ہوں تو

a+(b.c) = (a+b).(a+c) اور a . (b+c) = (a.b) + (a.c)

ذاتی عنصر: . کے لحاظ سے ذاتی عنصر 1 اور + کے لحاظ سے ذاتی عنصر 0 ہوتا ہے یعنی

x . 1 = x اور x + 0 = x، جبکہ x سیٹ B کا رکن ہے۔

کمپلیمنٹ: سیٹ B کے ہر رکن کا کمپلیمنٹ ہوتا ہے۔ سیٹ B کے ہر رکن x کے کمپلیمنٹ کو $\overline{x}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اس کی درج ذیل خصوصیت ہوتی ہیں۔

$x + \bar{x} = 1$ اور $x.\bar{x} = 0$

مثال: سیٹ $B = \{0, 1\}$ اور دو عوامل . اور + پر غور کیجیے۔

AND(.) کے عوامل

x	y	x.y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR(+) کے عوامل

x	y	x+y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

یہ سیٹ B بولین الجبرا ہے۔

نوٹ کیجیے کہ جمع کا یہ عمل عام جمع سے مختلف ہے، کیونکہ 1=1+1 ہوتا ہے۔ دونوں عوامل . اور + کی خصوصیات درج ذیل ہیں۔

بندش (Close): x.y اور x+y دونوں سیٹ B کے رکن ہیں (یعنی ہر x.y اور x + y، 0 ہیں یا 1)۔ پس سیٹ B خاصیت بندش رکھتا ہے۔

خاصیت مبادلہ: . اور + خاصیت مبادلہ رکھتے ہیں۔ درج ذیل جدول ان کے خاصیت مبادلہ رکھنے کو ظاہر کرتا ہے کیونکہ جدول سے ظاہر ہے کہ

$x.y = y.x$ اور $x+y=y+x$

جدول . اور + کی خاصیت مبادلہ کو ظاہر کررہے ہیں۔

x	y	x+y	y+x
0	0	0+0=0	0+0=0
0	1	0+1=1	1+0=1
1	0	1+0=1	0+1=1
1	1	1+1=1	1+1=1

x	y	x.y	y.x
0	0	0.0=0	0.0=0
0	1	0.1=0	1.0=0
1	0	1.0=0	0.1=0
1	1	1.1=1	1.1=1

تلازم: بولین متغیرات x,y اور z کی تمام قیمتوں کے لیے

$$x.(y.z) = (x.y).z$$

لہٰذا AND کا عمل خاصیت تلازم رکھتا ہے۔ OR کا عمل بھی خاصیت تلازم رکھتا ہے یعنی $x+(y+z)=(x+y)+z$

جدول . کی خاصیت تلازم رکھنے کو ظاہر کرتا ہے۔

x	y	z	x.y	(x.y).z	y.z	x.(y.z)
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

تقسیمی خاصیت: x, y, z کی تمام ممکن قیمتوں کے لیے

$$x.(y+z) = x.y + x.z$$

لہٰذا . خاصیت تقسیمی رکھتا ہے + پر۔ اسی طرح ہم ظاہر کر سکتے ہیں کہ

$$x + (y.z) = (x+y).(x+z)$$

x	y	z	x.y	x.z	x.y+x.z	y+z	x.(y+z)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

ذاتی عنصر: درج ذیل جدول سے ظاہر ہے کہ متغیر x کی کسی بھی قیمت کے لیے

$0 + x = x$ اور $x . 1 = x$

لہٰذا 0 ذاتی عنصر بلحاظ جمع اور 1 ذاتی عنصر بلحاظ ضرب ہے۔

x	x . 1	x + 0
0	0	0
1	1	1

کمپلیمنٹ: سیٹ B کے ہر رکن کا کمپلیمنٹ ہوتا ہے یعنی $x+\bar{x}=1$ اور $x.\bar{x}=0$۔ مثال کے طور پر 0 کا کمپلیمنٹ 1 اور 1 کا کمپلیمنٹ 0 ہے کیونکہ $0.1=0$ اور $0 + 1 = 1$

لہٰذا سیٹ B={0,1} تعریف شدہ عوامل کے ساتھ بولین الجبرا ہے کیونکہ یہ بولین الجبرا کی تمام شرائط کو پورا کرتا ہے۔

بولین مستقلات (Boolean Cosntants)

اگر B={0,1} عوامل . اور + کے ساتھ بولین الجبرا ہے تو 0 اور 1 بولین مستقلات کہلاتے ہے۔

دی گئی مثالوں میں بولین الجبرا میں بولین مستقلات کون کون سے ہیں۔

بولین متغیرات (Boolean Variables)

اگر B={0,1} عوامل . اور + کے ساتھ بولین الجبرا ہو تو متغیرات x,y وغیرہ بولین متغیرات کہلاتے ہیں۔ ہم بولین جملے بنانے کے لیے بولین مستقلات اور بولین متغیرات استعمال کر سکتے ہیں۔

بولین جُملے (Boolean Expressions)

اگر x, y اور z بولین متغیرات اور 0 اور 1 بولین مستقلات ہوں، تب . اور + اور کمپلیمنٹ عوامل کے ساتھ ہم دو یا دو سے زیادہ متغیرات اور مستقلات کو ملا کر بولین جملے بنا سکتے ہیں۔

$\overline{x}.(y+z)$ اور $x+y.z$ وغیرہ۔

بولین جملے کی قیمت معلوم کرنے کے لیے ہم درج ذیل اقدام کو مدنظر رکھتے ہیں۔

(i) سب سے پہلے تمام کمپلیمنٹس کی قیمتیں معلوم کرنا۔ (ii) حاصل ضرب کی قیمتیں معلوم کرنا۔

(iii) جمع کے عمل کی قیمت معلوم کرنا۔

ہم بولین جملے میں عوامل سرانجام دینے کی ترتیب (order) کو بریکٹوں کے استعمال سے تبدیل کر سکتے ہیں۔ اگر بریکٹیں استعمال کی جائیں تو سب سے پہلے اس حصہ کی قیمت معلوم کی جاتی ہے جو بریکٹوں کے اندر ہوتا ہے۔

درج ذیل مثال میں مختلف بولین جملوں کی قیمت معلوم کرنے کے لیے ان قوانین کے استعمال کو دکھایا گیا ہے۔

مثال-1 اگر y=1, x = 0 اور z = 0 ہو تو $\overline{x}.y + x.\overline{z} + x.\overline{y}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: سب سے پہلے کمپلیمنٹس معلوم کرتے ہیں۔

چونکہ x = 0 لہٰذا $\overline{x} = 1$ اسی طرح $\overline{y} = 0$ اور $\overline{z} = 1$

اب حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

$$\overline{x}.y = 1.1 = 1$$
$$x.\overline{z} = 0.1 = 0$$
$$x.\overline{y} = 0.0 = 0$$

لہٰذا $\overline{x}.y + x.\overline{z} + x.\overline{y} = 1 + 0 + 0 = 1$

مثال-2 x=0, y=1 اور z=1 ہو تو $(x+y).\overline{x} + (\overline{y}+z)$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: سب سے پہلے کمپلیمنٹس معلوم کرتے ہیں۔

$$\overline{x} = 1, \overline{y} = 0, \overline{z} = 0$$

اب $x + y = 0 + 1 = 1$

اور $\overline{y} + z = 0 + 1 = 1$

لہٰذا $(x+y).\,\overline{x} + (\overline{y}+z) = 1.1 + 1 = 1 + 1 = 1$

6.2.1 تمام ممکن ان پُٹ قیمتوں کے لیے جُملے کی قیمت معلوم کرنا
(Evaluating an Expression for all possible Input Values)

درج ذیل مثالیں ٹروتھ ٹیبل کے استعمال کو ظاہر کرتی ہیں جس میں کسی جملے کی قیمت معلوم کرنے کے لیے تمام ممکن ان پٹ قیمتوں کے استعمال کو دکھایا گیا ہے۔

مثال-1 ٹروتھ ٹیبل کے استعمال سے بولین جملے $x.\overline{y} + \overline{x}.y$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

x	$\overline{x}$	y	$\overline{y}$	$x.\overline{y}$	$\overline{x}.y$	$x.\overline{y}+\overline{x}.y$
0	1	0	1	0	0	0 + 0 = 0
0	1	1	0	0	1	0 + 1 = 1
1	0	0	1	1	0	1 + 0 = 1
1	0	1	0	0	0	0 + 0 = 0

مثال-2۔ ٹروتھ ٹیبل کے استعمال سے بولین جملے $x.y+\bar{x}.y+y.\bar{z}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

x	$\bar{x}$	y	$\bar{y}$	z	$\bar{z}$	$x.y$	$\bar{x}.y$	$y.\bar{z}$	$x.y+\bar{x}.y+y.\bar{z}$
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1

دیے گئے بولین جملے کا ٹروتھ ٹیبل بنانا فائدہ مند ہوتا ہے۔ یہ قابلِ غور ہے کہ دو متغیراتی جملوں کے ٹروتھ ٹیبل میں $2^2=4$ قطاریں اور تین متغیراتی جملے کے لیے $2^3=8$ قطاریں ہوں گی۔

6.2.2 بولین فنکشنز (Boolean Functions)

بولین جملے $x + y$ پر غور کیجیے اس میں x اور y متغیرات ہیں۔ اب ایک فنکشن f فرض کیا جس کے لیے

☆ f کے پاس بطور ان پٹ دو بولین مستقلات ہیں۔

☆ f درج بالا جملے کی قیمت کو ان پٹ کی قیمتوں پر معلوم کرتا ہے۔

☆ معلوم کی گئی قیمت f کا جواب ہے۔

دو قیمت والے فنکشن کی مثالیں

$$f(x,y) = x + y \quad \text{اور} \quad g(x,y) = \bar{x}.\bar{y} + x.y$$

جبکہ x اور y بولین متغیرات ہیں۔

اب ایک اور بولین جملے $x + y.z$ پر غور کیجیے۔ یہاں x, y اور z بولین متغیرات ہیں۔ اب g کی قیمت نکالنے کے درج ذیل قانون بنائیں۔

☆ g ان پٹ کے طور پر دو مستقلات لیتا ہے۔

☆ g تب ان پٹ قیمت پر درج بالا جملے کی قیمت کو معلوم کرتا ہے۔

☆ معلوم شدہ قیمت g کے لیے حتمی جواب ہے۔

مثال۔ بذریعہ ٹروتھ ٹیبل فنکشن $f(x,y)=x.\bar{y}+\bar{x}.y$ کو ظاہر کیجیے۔

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$x.\bar{y}$	$\bar{x}.y$	$f(x,y)=x.\bar{y}+\bar{x}.y$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0

ٹروتھ پیرامیٹرز کی تمام قیمتوں کے لیے فنکشن کی قیمت کو ظاہر کرتا ہے۔

6.3 بولین الجبرا کے قوانین اور مسئلے (Laws and Theorems of Boolean Algebra)

اس حصہ میں ہم بولین الجبرا کے مختلف قوانین کو دیکھیں گے اور کچھ مفید مسئلے بھی ثابت کریں گے۔ یہ مسئلے مختلف بولین فنکشنز اور مختلف منطقی سرکٹس کو مختصر کرنے میں استعمال ہوتے ہیں۔

مسئلہ 1: آئیڈیمپوٹینٹ کا قانون:

اگر x ایک بولین متغیر ہے تو $x+x=x$ اور $x.x=x$ اس قانون کو درج ذیل دو طریقوں سے ثابت کر سکتے ہیں۔

ثبوت بذریعہ ٹروتھ ٹیبل

x	x.x
0	0 . 0 = 0
1	1 . 1 = 1

درج بالا ٹروتھ ٹیبل سے ظاہر ہے کہ اگر $x=0$ ہو تو $x+x$ بھی صفر ہے اور اگر $x=1$ ہو تو $x+x$ بھی 1 ہے۔ پس $x+x = x$

نوٹ: بولین الجبرا کے تمام مسئلے ٹروتھ ٹیبل اور بولین الجبرا کی شرائط سے ثابت کیے جا سکتے ہیں۔

ثبوت بذریعہ بولین الجبرا کی شرائط

اب ہم مسئلہ کے دوسرے حصہ کو بولین الجبرا کی شرائط استعمال کرتے ہوئے ثابت کرتے ہیں۔

ثبوت:

L.H.S $= x + x$

$= x.1+x.1$ (ذاتی عنصر)

$= x.(1+1)$ (قانون تقسیمی)

$= x.1$ $(1 + 1 = 1)$

$= x$ (ضربی ذاتی عنصر)

= R.H.S

نوٹ: دوسرا حصہ . کو + میں تبدیل کرنے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یہ اصول چند مسئلے ثابت کرنے میں مفید ثابت ہوگا۔

مسئلہ 2- اگر x ایک بولین متغیر ہے تب،

$x . 0 = 0$ اور $x + 1 = 1$

ہم اس مسئلہ کو بذریعہ ٹروتھ ٹیبل ثابت کر سکتے ہیں، لیکن اس کو بطور مشق چھوڑا جا رہا ہے۔ یہاں ہم اس مسئلہ کو بولین الجبرا کی شرائط اور پہلے سے ثابت شدہ مسئلوں کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں گے۔

ثبوت:

L.H.S $= x + 1$

$= x+(x+\bar{x})$ (کمپلیمنٹ کی تعریف کی رو سے)

$= (x+x)+\bar{x}$ (قانون تلازم)

$= x+\bar{x}$ (بذریعہ آئیڈیمپوٹینٹ قانون)

$= 1$ (کمپلیمنٹ کی تعریف کی رو سے)

= R.H.S

اب ہم اس مسئلہ کے دوسرے حصہ کو ثابت کرتے ہیں۔

ثبوت:

$$\begin{aligned}
L.H.S &= x\,.\,0 \\
&= x.(x.\bar{x}) && \text{(کمپلیمنٹ کی تعریف کی روسے)} \\
&= (x.x).\bar{x} && \text{(قانون تلازم)} \\
&= x.\bar{x} && \text{(آئیڈیمپوٹینٹ قانون)} \\
&= 0 && \text{(کمپلیمنٹ کے قانون کی روسے)} \\
&= R.H.S
\end{aligned}$$

مسئلہ 3: کسی بولین متغیر x کے لیے $\bar{\bar{x}} = x$ اس کو انوولوشن (Involution) (یا کینسلیشن خصوصیت) کہتے ہیں۔

ثبوت:

ہم جانتے ہیں کہ ہر مسئلہ کو ٹروتھ ٹیبل سے ثابت کر سکتے ہیں۔ اس مسئلہ کو حل کرنے کے لیے ٹروتھ ٹیبل کو استعمال کریں گے۔

x	$\bar{x}$	$\bar{\bar{x}} = x$
0	1	0
1	0	1

ٹروتھ ٹیبل کے پہلے اور تیسرے کالم کا موازنہ کرتے ہوئے نتیجہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 4: اگر x اور y بولین متغیرات ہوں تو

$x.(x + y) = x$ اور $x+(x.y)=x$

اس نتیجہ کو ایبز ورپشن (Absorption) کا قانون کہتے ہیں۔

ثبوت:

$$\begin{aligned}
L.H.S &= x + x.y \\
&= x.1+x.y && \text{(ذاتی عنصر کی روسے)} \\
&= x.(1+y) && \text{(قانونِ تقسیمی)} \\
&= x.1 && (1+y=1) \\
&= x && \text{(ذاتی عنصر کی روسے)} \\
&= R.H.S
\end{aligned}$$

دوسرے حصہ کا ثبوت طلبا کے لیے بطور مشق چھوڑا جارہا ہے۔

مسئلہ 5: ڈی مارگن کا قانون (De Morgan's Law)

دواعداد کی جمع کا کمپلیمنٹ اُن کے کمپلیمنٹس کی حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے۔ اسی طرح دواعداد کی حاصل ضرب کا کمپلیمنٹ اُن اعداد کے کمپلیمنٹس کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔ یعنی اگر x اور y دو بولین متغیرات ہوں تب $\overline{x+y} = \bar{x}.\bar{y}$ اور $\overline{x.y} = \bar{x} + \bar{y}$

ثبوت: ہم اس مسئلہ کے پہلے نتیجہ کو بذریعہ ٹروتھ ٹیبل ثابت کریں گے۔

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$x+y$	$\overline{x+y}$	$\bar{x}.\bar{y}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

اس ٹیبل کے آخری دو کالموں سے ظاہر ہے کہ $\overline{x+y} = \bar{x}.\bar{y}$

6.3.1 دہرے پن کا اصول (Duality Principle)

دہرے پن کے اصول کے مطابق نتیجہ جسے بولین الجبرا کی شرائط سے اخذ کیا گیا ہو، درج ذیل مراحل میں قابل عمل رہتا ہے:

☆ ہر 0 کو نتیجہ میں 1 سے تبدیل کیا جاتا ہے اور اسی طرح اس کا اُلٹ بھی۔

☆ اصل نتیجہ میں . کو + سے تبدیل کیا جاتا ہے اور اسی طرح اس کا اُلٹ بھی۔

نوٹ: یہ نتیجہ بہت اہم ہے کیونکہ اگر ہم بولین الجبرا کا کوئی نتیجہ ثابت کر سکتے ہوں تب ثابت شدہ نتیجہ سے ایک اور صریح نتیجہ براہ راست حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 1- ثابت کیجیے کہ $\overline{x.y} = \overline{x} + \overline{y}$

حل: ہم مسئلہ 5 کی رو سے جانتے ہیں کہ $\overline{x+y} = \overline{x}.\overline{y}$

اب $\overline{x+y} = \overline{x}.\overline{y}$ پر دہرے پن کا اصول استعمال کرتے ہوئے

$$\overline{x.y} = \overline{x} + \overline{y}$$

مثال 2- درج ذیل جملوں کے ڈوائیل (Dual) حاصل کرنے کے لیے دہرے پن کا اصول لاگو کیجیے۔

$$\overline{x+y} = \overline{x}.\overline{y}, x + \overline{x}.y = x + y, x + 1 = 1, x.x = x$$

اور $x.(y+z) = (x.y) + (x.z)$

حل: (i) صرف . کو + میں تبدیل کرتے ہوئے ہم حاصل کرتے ہیں: $x + x = x$

(ii) + کو . اور 1 کو 0 میں تبدیل کرتے ہوئے ہم حاصل کرتے ہیں: $x . 0 = 0$

(iii) + کو . اور . کو + میں تبدیل کرتے ہوئے ہم حاصل کرتے ہیں: $x.\overline{x} + y = x.y$

(iv) + کو . اور . کو + میں تبدیل کرتے ہوئے ہم حاصل کرتے ہیں: $\overline{x.y} = \overline{x} + \overline{y}$

(v) + کو . اور . کو + میں تبدیل کرتے ہوئے ہم حاصل کرتے ہیں: $x + (y.z) = (x+y).(x+z)$

6.3.2 بولین فنکشن کو مختصر کرنا (Simplifying a Boolean Function)

درج بالا مثالوں سے یہ ظاہر ہے کہ ہر بولین فنکشن کو بولین فنکشنز کے ملاپ کے طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے اور منطقی گیٹ کے ہر سرکٹ کو بولین جملے کے طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ چونکہ کمپیوٹر میموری کی اندرونی ساخت اور پروسیسر ان گیٹس پر مشتمل ہوتے ہیں لہٰذا فنکشن کو سادہ جملے میں ظاہر کرنا ہمیشہ فائدہ مند ہوتا ہے۔ ایک سادہ جملہ سے ایک سادہ اور بہتر ہارڈ ویئر بنانے میں مدد ملتی ہے۔

اس حصہ میں ہم دیے گئے بولین فنکشنز کو مختصر کرنا سیکھیں گے۔ ہم بولین فنکشنز کو مختصر کرنے کے دو طریقے سیکھیں گے۔

☆ بولین الجبرا کے قوانین کو استعمال کرتے ہوئے بولین فنکشن کو مختصر کرنا۔

☆ K-میپ ایلگورتھم استعمال کرتے ہوئے بولین فنکشن کو مختصر کرنا۔

بولین الجبرا کے قوانین کو استعمال کرتے ہوئے بولین فنکشن کو مختصر کرنے کا طریقہ درج ذیل مثال سے سمجھا جا سکتا ہے۔

مثال 1- بولین فنکشن $f(x, y) = x + \overline{x}.y$ کو مختصر کیجیے۔

حل:

$f(x,y) = x + \overline{x}.y$

$= (x + \overline{x}).(x + y)$ (بذریعہ قانون تقسیمی)

$= 1 .(x + y)$ (کمپلیمنٹ کی تعریف کی رو سے)

$= (x + y)$ (ذاتی عنصر کی تعریف کی رو سے)

نوٹ کیجیے کہ غیر مختصر شدہ فنکشن کو عمل میں لانے کے لیے تین منطقی گیٹس اور مختصر شدہ فنکشن کو عمل میں لانے کے لیے ایک منطقی گیٹ کی ضرورت ہوتی ہے۔

مثال 2- بولین فنکشن $f(x, y, z) = \overline{x}.y.z + x.\overline{y} + \overline{x}.\overline{y}.z$ کو مختصر کیجیے۔

حل:

$$f(x, y, z) = \overline{x}.y.z + x.\overline{y} + \overline{x}.\overline{y}.z$$

$= \overline{x}.y.z + \overline{x}.\overline{y}.z + x.\overline{y}$ (قانونِ مبادلہ)

$= \overline{x}.z(y + \overline{y}) + x.\overline{y}$ (قانونِ تقسیمی)

$= \overline{x}.z.1 + x.\overline{y}$ (کمپلیمنٹ کی تعریف کی رو سے)

$= \overline{x}.z + x.\overline{y}$ (ذاتی عنصر)

واضح ہوا کہ غیر مختصر شدہ فنکشن کو عمل میں لانے کے لیے 9 منطقی گیٹس جبکہ مختصر شدہ فنکشن کو عمل میں لانے کے لیے 5 منطقی گیٹس کی ضرورت ہوتی ہے۔

مثال 3- درج ذیل بولین فنکشن کو مختصر کیجیے۔

$$f(x, y, z) = x.z + \overline{x}.z.y$$

حل:

$$f(x, y, z) = x.z + \overline{x}.z.y$$

$= x.z + \overline{x}.y.z$ (قانونِ تلازم مبادلہ)

$= (x + \overline{x}.y).z$ (قانونِ تقسیمی)

$= (x + y).z$ (آئیڈیمپوٹینٹ قانون)

$= x.z + y.z$ (قانونِ تقسیمی)

6.3.3 بولین الجبری قوانین کے استعمال کے نقصانات (Disadvantages of Using Boolean Algebraic Laws)

بولین جملوں کو مختصر کرنے کے لیے بولین الجبری قوانین کے استعمال کے نقصانات کی فہرست درج ذیل ہے۔

- ☆ ایک کمپیوٹر پروگرام جو کہ دیے گئے بولین فنکشن کو مختصر کرنے کے لیے ان قوانین کو استعمال کر سکتا ہے، کو لکھنا بہت مشکل ہے۔
- ☆ ممکن ہے کہ اس پروسیس سے بہترین مختصر شدہ فنکشن حاصل نہ ہو اور مختلف لوگوں کے پاس مختصر شدہ مختلف جملے ہوں۔
- ☆ اس پروسیس سے کام لینے کے لیے ایک بولین فنکشن کی ضرورت ہوتی ہے لیکن اکثر انجینئرنگ ایپلیکیشنز میں ہمارے پاس اصل بولین فنکشن نہیں ہوتا لیکن درکار فنکشن کا ٹروتھ ٹیبل ہوتا ہے۔

ان نقصانات پر قابو پانے کے لیے کرناف نے بولین جملے کو مختصر کرنے کا ایک اور طریقہ دریافت کیا۔ یہ طریقہ بولین الجبرائیک قوانین پر انحصار تو کرتا ہے مگر اوپر بیان کیے گئے نقصانات سے محفوظ ہے۔ اسے عام طور پر مختصر کرنے کا K-میپ طریقہ کہتے ہیں۔

ہم یہ طریقہ سیکھنے سے پہلے درج ذیل اصطلاحات سیکھیں گے۔

لٹرلز (Literals)

اگر ہمارے پاس دو متغیرات x اور y کا بولین فنکشن ہے تب ہر متغیر فنکشن میں دو طرح (متغیر بذاتِ خود یا کمپلیمنٹ کی شکل میں) سے ظاہر ہو سکتا ہے۔ ان میں سے ہر شکل کو لٹرل کہتے ہیں۔ ہر لٹرل بولین فنکشن کے اِن پُٹ کو ظاہر کرتا ہے۔

Minterms (Standard Product) منٹرمز

اگر ہمارے پاس دو بولین متغیرات x اور y ہوں تو ہم ان متغیرات کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل چار حاصل ضرب معلوم کرتے ہیں۔

$x.y, x.\overline{y}, \overline{x}.y, \overline{x}.\overline{y}$

اسے دو متغیرات کے ساتھ منٹرمز یا سٹینڈرڈ پراڈکٹ کہتے ہیں۔

مثال۔ تین متغیرات y,x اور z کی فہرست بنائیے۔ n متغیرات کے ساتھ منٹرمز معلوم کرنے کا عام کلیہ بتائیے۔

تین متغیرات کے ساتھ ہم درج ذیل منٹرمز بنا سکتے ہیں۔

$x.y.z$, $x.y.\overline{z}$, $x.\overline{y}.z$, $x.\overline{y}.\overline{z}$,

$\overline{x}.y.z$, $\overline{x}.y.\overline{z}$, $\overline{x}.\overline{y}.z$, $\overline{x}.\overline{y}.\overline{z}$

ہم دو متغیرات کے ساتھ $4 = 2^2$ منٹرمز اور تین متغیرات کے ساتھ $8 = 2^3$ منٹرمز بنا سکتے ہیں۔ پس n متغیرات کے ساتھ ہم 2^n منٹرمز بنا سکتے ہیں۔ درج ذیل جدول یہ ظاہر کرتا ہے کہ ہم ان منٹرمز کو نام کیسے دیتے ہیں۔ منٹرم کے ساتھ متعلقہ متغیر کی قیمت کو یاد رکھنا اہم ہوتا ہے۔

منٹرمز کے ناموں کا جدول

نام	x	y	z	منٹرم
m0	0	0	0	$\overline{x}.\overline{y}.\overline{z}$
m1	0	0	1	$\overline{x}.\overline{y}.z$
m2	0	1	0	$\overline{x}.y.\overline{z}$
m3	0	1	1	$\overline{x}.y.z$
m4	1	0	0	$x.\overline{y}.\overline{z}$
m5	1	0	1	$x.\overline{y}.z$
m6	1	1	0	$x.y.\overline{z}$
m7	1	1	1	$x.y.z$

Maxterms (Standard SUM) میکس ٹرمز

اگر ہمارے پاس دو بولین متغیرات x اور y ہوں تو ہم ان متغیرات کو استعمال کرتے ہوئے چار میکس ٹرمز بنا سکتے ہیں۔ $x + y, x + \overline{y}, \overline{x} + y, \overline{x} + \overline{y}$ کو ہم دو متغیرات میں سٹینڈرڈ ٹرمز یا میکس ٹرمز کہتے ہیں۔ اسی طرح n بولین متغیرات کے ساتھ 2^n میکس ٹرمز بنا سکتے ہیں۔ درج ذیل جدول سے ظاہر ہے کہ ہم ان میکس ٹرمز کو نام کیسے دیتے ہیں۔

میکس ٹرمز کے ناموں کا جدول

نام	x	y	z	میکس منٹرم
M0	0	0	0	$x + y + z$
M1	0	0	1	$x + y + \overline{z}$
M2	0	1	0	$x + \overline{y} + z$
M3	0	1	1	$x + \overline{y} + \overline{z}$
M4	1	0	0	$\overline{x} + y + z$
M5	1	0	1	$\overline{x} + y + \overline{z}$
M6	1	1	0	$\overline{x} + \overline{y} + z$
M7	1	1	1	$\overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$

کم سے کم لٹرلز میں بولین فنکشن کو مختصر کرنے کے لیے منٹرمز اور میکس ٹرمز کا تصور بڑا فائدہ مند ہے۔

ایک اوراہم تصور یہ ہے کہ ہم ہر بولین فنکشن کو منٹر مز یا میکس ٹرمز کے مجموعہ یا میکس ٹرمز کے حاصل ضرب کے طور پر لکھ سکتے ہیں۔ہم منٹر مز کے تصور کو تفصیل سے سیکھیں گے جبکہ میکس ٹرمز کو آئندہ کلاسوں میں پڑھیں گے۔

6.4 کارناف میپ (Karnaugh Map)

بولین فنکشنز کو حل کرنے کے لیے کارناف میپ ایک نہایت کارآمد طریقہ ہے۔اس حصہ میں ہم دو یا تین متغیرات والے بولین فنکشن کارناف میپ کی شکل میں حل کرنا سیکھیں گے۔

6.4.1 دو متغیرات والے بولین فنکشن کا میپ (Map for a two Variables Boolean Function)

درج ذیل شکل دو متغیرات والے بولین فنکشن کی K-میپ کی شکل میں ترتیب کو ظاہر کرتی ہے۔لہٰذا m0 قطار صفر اور کالم صفر میں منٹر مز مربع ہے، جبکہ m1 قطار صفر اور کالم 1 میں منٹر مز مربع ہے۔

x\y	0	1
0	m0	m1
1	m2	m3

• آیئے ایک فنکشن جو کہ منٹر مز کا مجموعہ ہے پر غور کریں۔

$$f(x, y, z) = \bar{x}.y + x.\bar{y}$$

اس فنکشن کو K-میپ کی شکل میں یوں لکھا جا سکتا ہے:

x\y		$\bar{y}$	y
0	$\bar{x}$	0	1
1	x	1	0

کسی فنکشن کو K-میپ کی شکل میں ظاہر کرنے کے لیے ہم اُس فنکشن میں منٹر مز کو بیان کرتے ہیں اور اُن تمام مربعوں میں 1 لکھتے ہیں جو کہ فنکشن میں موجود منٹر مز سے مطابقت رکھتے ہیں اور بقیہ مربعوں میں صفر۔

6.4.2 تین متغیرات والے بولین فنکشن کے لیے میپ (Map for a three Variable Boolean Function)

تین متغیرات والے بولین فنکشن کا میپ درج ذیل ہے۔

		$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$	yz	$y\bar{z}$
	x\y.z	00	01	11	10
$\bar{x}$	0	m0	m1	m3	m2
x	1	m4	m5	m7	m6

جیسا کہ اوپر جدول میں دکھایا گیا ہے، قطاروں اور کالموں کو ترتیب دینا نہایت اہم ہوتا ہے۔K-میپ میں تین متغیرات والے فنکشن کو ظاہر کرنے کا طریقہ بھی وہی ہے جو کہ دو متغیرات والے فنکشن کا۔درج ذیل میں بولین فنکشن کو K-میپ کی شکل میں دکھانے کا طریقہ کار دکھایا گیا ہے۔

مثال 1- درج ذیل بولین فنکشن کو تین متغیرات K-میپ میں دکھایئے۔

$$f(x, y, z) = (x.y.\bar{z}) + (\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}) + (x.\bar{y}.\bar{z}) + (\bar{x}.y.z)$$

حل: عمل 1۔ پہلے فنکشن کو منٹر مز کے مجموعہ کے طور پر ظاہر کیجیے۔

$$f(x, y, z) = (x.y.\bar{z}) + (\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}) + (x.\bar{y}.\bar{z}) + (\bar{x}.y.z)$$

یہ فنکشن پہلے ہی مطلوبہ شکل میں ہے۔

عمل 2۔ فنکشن میں موجود ہر منٹرم کے لیے میپ میں مطابقہ مربع میں 1 لکھیے اور دوسرے تمام مربعوں میں صفر لکھیے۔

	x \ y.z	0.0	0.1	1.1	1.0
		$\bar{y}.\bar{z}$	$\bar{y}.z$	$y.z$	$y.\bar{z}$
0	$\bar{x}$	1	0	1	0
1	x	1	0	0	1

مثال 2- بولین فنکشن $f(x,y) = y$ کو دو متغیرات K- میپ میں ظاہر کیجیے۔

حل: عمل 1۔ پہلے فنکشن کو منٹرمز کے مجموعہ کی شکل میں لکھیے۔

$f(x,y) = y$ (ذاتی عنصر)

$= (x+\bar{x}).y$ (کمپلیمنٹ)

$= x.y+\bar{x}.y$ (تقسیمی)

عمل 2۔ فنکشن میں موجود ہر منٹرم کے لیے میپ میں مطابقہ مربع میں 1 لکھیے۔

	x \ y	0 $\bar{y}$	1 y
0	$\bar{x}$	0	1
1	x	0	1

6.4.3 K- میپ کے استعمال سے دو متغیرات والے بولین فنکشن کو مختصر کرنا

(Simplifying a Boolean Function of two Variables Using K- map)

درج ذیل مثالیں K- میپ کے استعمال سے دو متغیرات والے بولین فنکشن کو مختصر کرنے کے طریقہ کار کی وضاحت کرتی ہیں۔

مثال 1- بولین فنکشن $f(x,y) = x.y + \bar{x}.y$ کو مختصر کیجیے۔

حل: عمل 1۔ فنکشن کو K- میپ کی مندرجہ ذیل شکل میں ظاہر کیجیے۔

	x \ y	$\bar{y}$	y
0	$\bar{x}$	0	1
1	x	0	1

عمل 2۔ جیسا کہ نیچے دکھایا گیا ہے، کسی بھی ملحقہ 1 کے دو یا چار کے گروپس کی نشاندہی کیجیے۔

	x \ y	$\bar{y}$	y
0	$\bar{x}$	0	1
1	x	0	1

عمل 3۔ ہر گروپ کے لیے اختصار شدہ جملہ لکھیے۔

گروپ کیے گئے منٹرمز $x.y$ اور $\bar{x}.y$ ہیں چونکہ x کی قیمت تبدیل ہوتی ہے۔ لہذا ہم منٹرمز کے اس گروپ کو درج ذیل جملے میں لکھ سکتے ہیں۔

$$x.y + \bar{x}.y = y$$

عمل 4۔ آخری مختصر شدہ شکل کو حاصل ضرب کے مجموعہ کے برابر لکھیے۔

$$f(x, y) = y$$

مثال 2- بولین فنکشن $f(x, y) = x.\bar{y} + \bar{x}.y + x.y$ کو مختصر کیجیے۔

حل: عمل 1۔ فنکشن کو K-میپ کی شکل میں ظاہر کیجیے۔

	x \ y	0	1
$\bar{x}$	0	0	1
x	1	1	1

عمل 2۔ جیسا کہ نیچے دکھایا گیا ہے، کسی بھی ملحقہ 1 کے دو یا چار کے گروپس کی نشاندہی کیجیے۔

	x \ y	0	1
$\bar{x}$	0	0	1
x	1	1	1

عمل 3۔ ہر گروپ کے لیے مختصر جملہ لکھیے۔

گروپ کیے گئے منٹرمز $\bar{x}.y$ اور $x . y$ ہیں اور ایک اور گروپ کیے گئے منٹرمز $x.\bar{y}$ اور $x . y$ چونکہ پہلے گروپ میں x اور دوسرے گروپ میں y کی قیمت تبدیل ہوتی ہے۔

لہٰذا پہلے گروپ کے لیے جملہ = y

دوسرے گروپ کے لیے جملہ = x

عمل 4۔ آخری مختصر شکل کو حاصل ضرب کے مجموعہ کی شکل میں لکھیے۔

$$f(x, y) = x + y$$

مثال 3- بولین فنکشن $f(x, y) = x.\bar{y} + \bar{x}.y + x.y + \bar{x}.\bar{y}$ کو مختصر کیجیے۔

حل: عمل 1۔ فنکشن کو درج ذیل K-میپ کی شکل میں ظاہر کیجیے۔

		$\bar{y}$	y
	x \ y	0	1
$\bar{x}$	0	1	1
x	1	1	1

عمل 2۔ جیسا کہ نیچے دکھایا گیا ہے کہ دو یا چار ملحقہ 1 کے گروپس کی نشاندہی کیجیے۔

		$\bar{y}$	y
	x \ y	0	1
$\bar{x}$	0	1	1
x	1	1	1

عمل 3۔ ہر گروپ کے لیے مختصر جملہ لکھیے۔ تمام ارکان 1 ہیں لہٰذا صرف ایک ہی گروپ ہے۔

عمل 4۔ آخری مختصر شکل کو حاصل ضرب کے مجموعہ کے طور پر لکھیے۔

$$f(x, y) = 1$$

مثال4- بولین فنکشن $f(x, y) = x.\overline{y} + \overline{x}.y$ کو مختصر کیجیے۔

حل: عمل 1۔ فنکشن کو مندرجہ ذیل K-میپ کی شکل میں کیجیے۔

		$\overline{y}$	y
	$x \setminus y$	0	1
$\overline{x}$	0	0	1
x	1	1	0

عمل 2۔ ملحقہ 1 کے کسی بھی دو یا چار کے گروپوں کی نشاندہی کیجیے جیسا کہ درج ذیل میں دکھایا گیا ہے۔

		$\overline{y}$	y
	$x \setminus y$	0	1
$\overline{x}$	0	0	1
x	1	1	0

نوٹ کیجیے کہ وتر کے ساتھ ارکان ایک دوسرے سے ملحقہ نہیں ہوتے۔

عمل 3۔ ہر گروپ کے لیے مختصر جملہ لکھیے۔ چونکہ کوئی گروپ نہیں ہے اس لیے ہم میپ میں ہر 1 کے لیے متعلقہ منٹرم لکھتے ہیں۔

$x.\overline{y}$ اور $\overline{x}.y$

عمل 4۔ آخری مختصر شکل کو حاصل ضرب کے مجموعہ کے طور پر لکھیے۔

$$f(x, y) = x.\overline{y} + \overline{x}.y$$

6.4.4 K-میپ کے استعمال سے تین متغیرات والے بولین فنکشن کو مختصر کرنا

(Simplifying a Boolean Function of Three Variables Using K-Map)

K-میپ کے استعمال سے تین متغیرات والے بولین فنکشن کو مختصر کرنے کے طریقہ کار کو درج ذیل مثالوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔

مثال1- بولین فنکشن $f(x, y, z) = x.y.\overline{z} + \overline{x}.\overline{y}.\overline{z} + x.\overline{y}.\overline{z} + \overline{x}.y.z$ کو مختصر کیجیے۔

حل: عمل 1۔ فنکشن کو مندرجہ ذیل K-میپ کی شکل میں ظاہر کیجیے۔

$x \setminus y.z$	$\overline{y}.\overline{z}$	$\overline{y}.z$	$y.z$	$y.\overline{z}$
$\overline{x}$	1	0	1	0
x	1	0	0	1

عمل 2۔ جیسا کہ نیچے دکھایا گیا ہے، ملحقہ 1 کے دو یا چار کے گروپوں کی نشاندہی کیجیے۔

$x \setminus y.z$	$\overline{y}.\overline{z}$	$\overline{y}.z$	$y.z$	$y.\overline{z}$
$\overline{x}$	1	0	1	0
x	1	0	0	1

گروپ1: $\overline{x}.\overline{y}.\overline{z}$ اور $x.\overline{y}.\overline{z}$ پہلا کالم

گروپ2: $x.\overline{y}.\overline{z}$ اور $x.y.\overline{z}$: دوسری قطار

لہٰذا تیسرے کالم میں غیر گروپ ٹرم: $\overline{x}.y.z$

عمل 3۔ ہر گروپ کے لیے مختصر جملہ لکھیے۔ چونکہ گروپ دو ہیں لہٰذا ہم میپ میں ہر متعلقہ قیمت 1 کے لیے منٹرم لکھتے ہیں۔

گروپ 1: $\overline{x}.\overline{y}.\overline{z}$ اور $x.\overline{y}.\overline{z}$ لہٰذا مختصر جملہ $\overline{y}.\overline{z}$ ہے (x ختم ہو جائے گا)

گروپ 2: $x.y.\overline{z}$ اور $x.\overline{y}.\overline{z}$ لہٰذا مختصر جملہ $x.\overline{z}$ ہے (y ختم ہو جائے گا)

عمل 4۔ آخری مختصر شکل بطور حاصل ضرب کے مجموعہ کے طور پر لکھیے۔ غیر گروپ ٹرم کو اُسی طرح جمع کر لیا جائے گا۔

$$f(x, y, z) = \overline{y}.\overline{z} + x.\overline{z} + \overline{x}.y.z$$

مثال 2۔ بولین فنکشن $f(x, y, z) = \overline{x}.y.z + \overline{x}.y.\overline{z} + x.y.z + x.y.\overline{z} + x.\overline{y}.\overline{z}$ کو مختصر کیجیے۔

حل: عمل 1۔ فنکشن کو K-میپ کی شکل میں ظاہر کیجیے۔

$x \setminus y.z$	$\overline{y}.\overline{z}$	$\overline{y}.z$	$y.z$	$y.\overline{z}$
$\overline{x}$	0	0	1	1
x	1	0	1	1

عمل 2۔ جیسا کہ نیچے دکھایا گیا ہے، ملحقہ 1 کے دو یا چار کے گروپس کی نشاندہی کیجیے۔

$x \setminus y.z$	$\overline{y}.\overline{z}$	$\overline{y}.z$	$y.z$	$y.\overline{z}$
$\overline{x}$	0	0	1	1
x	1	0	1	1

گروپس یہ ہیں۔

گروپ 1: $\overline{x}.y.z$ $x.y.z,$ $\overline{x}.y.\overline{z},$ $x.y.\overline{z},$

گروپ 2: $x.\overline{y}.\overline{z}$ $x.y.\overline{z}$

یہ بات قابل غور ہے کہ بائیں کنارے پر مربعوں کو دائیں کنارے پر مربعوں سے ملحقہ لیا جاتا ہے۔ یہ گروپ 2 بناتے ہیں اور انہیں مستطیل نما اشکال بنا کر ظاہر کیا جاتا ہے۔

عمل 3۔ ہر گروپ کے لیے مختصر جملہ لکھیے۔

گروپ 1: کی مختصر شکل y ہے کیونکہ $\overline{x}, x$ اور $\overline{z}, z$ گروپ میں تبدیل ہو جاتے ہیں۔

گروپ 2: کی مختصر شکل $x.\overline{z}$ ہے کیونکہ دونوں y اور $\overline{y}$ گروپ میں تبدیل ہو جاتے ہیں۔

عمل 4۔ آخری مختصر شکل کو حاصل ضرب کے مجموعہ کے طور پر لکھیے۔

$$f(x, y) = y + x.\overline{z}$$

مثال 3۔ بولین فنکشن $f(x, y, z) = x.y.\overline{z} + \overline{x}.\overline{y}.\overline{z} + x.\overline{y}.\overline{z} + \overline{x}.y.z + \overline{x}.\overline{y}.z + \overline{x}.y.\overline{z} + x.y.z$ کو مختصر کیجیے۔

حل: عمل 1۔ فنکشن کو K-میپ کی شکل میں ظاہر کیجیے۔

$x \setminus y.z$	$\overline{y}.\overline{z}$	$\overline{y}.z$	$y.z$	$y.\overline{z}$
$\overline{x}$	1	1	1	1
x	1	0	1	1

عمل 2۔ 1 کے ملحقہ دو یا چار کے گروپوں کی نشاندہی کیجیے جیسا کہ نیچے دکھایا گیا ہے۔

$x \backslash y.z$	$\bar{y}.\bar{z}$	$\bar{y}.z$	$y.z$	$y.\bar{z}$
$\bar{x}$	1	1	1	1
x	1	0	1	1

لہٰذا تین گروپس یہ ہیں۔

گروپ 1: (سب سے اوپر والی قطار): $\bar{x}.y.\bar{z}$ $\quad \bar{x}.y.z$ $\quad \bar{x}.\bar{y}.z$ $\quad \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}$

گروپ 2: (آخری دو کالم): $x.y.\bar{z}$ $\quad x.y.z$ $\quad \bar{x}.y.\bar{z}$ $\quad \bar{x}.y.z$

گروپ 2: (پہلا اور آخری کالم): $x.y.\bar{z}$ $\quad \bar{x}.y.\bar{z}$ $\quad x.\bar{y}.\bar{z}$ $\quad \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}$

ایک مرتبہ پھر نوٹ کیجیے کہ بائیں کنارے پر مربعوں کو دائیں کنارے پر مربعوں سے ملحقہ لیا جاتا ہے۔ یہ گروپ 2 بناتے ہیں اور ان کی مستطیل نما شکل سے نشاندہی کی گئی ہے۔ یہ بھی نوٹ کیجیے کہ منٹرم ایک سے زیادہ گروپوں میں استعمال ہو سکتا ہے۔

عمل 3۔ ہر گروپ کے لیے مختصر جملہ لکھیے جو کہ یہ ہیں:

گروپ 1، $\bar{x}$. ہو جاتا ہے۔ گروپ 2، y اور گروپ 3، $\bar{z}$. ہو جاتا ہے۔

عمل 4۔ آخری مختصر شکل کو حاصل ضرب کے مجموعہ کے طور پر لکھیے۔ $f(x, y, z) = \bar{x} + y + \bar{z}$

یہ بات قابلِ غور ہے کہ دو ایک (two 1's) کا گروپ 1 لٹرل کو ختم کرتا ہے۔ چار ایک کا گروپ 2 لٹرلز کو اور 8 ایک کا گروپ تین لٹرلز کو ختم کرتا ہے۔ لہٰذا اگر تمام مربعوں میں ایک ہو تب تمام لٹرلز ختم ہو جاتے ہیں اور فنکشن مستقل یعنی 1 ہو جاتا ہے۔

مختصر کرنے کے لیے K- میپ کے طریقہ کار کے فائدے اور نقصانات:

(Advantages and Disadvantages of K-map method of Simplification)

اس طریقہ کے چند فائدے درج ذیل ہیں:

☆ اس طریقہ کو اپنانا بہت آسان ہے۔

☆ یہ ایک ترتیب وار طریقہ کار ہے۔ یہ ہمیشہ ایک مینیمل (minimal) حل کے لیے رہنمائی مہیا کرتا ہے۔

اس سسٹم کا نقصان یہ ہے کہ یہ سکیل ایبل (Scalable) نہیں ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ یہ سسٹم کم متغیرات کے لیے اچھی طرح کام کرتا ہے، جبکہ متغیرات کی زیادہ تعداد کے لیے پیچیدہ ہو جاتا ہے۔

مشق

1۔ بولین الجبرا کے لیے ڈی مارگن کے قوانین بیان اور ثابت کیجیے۔

2۔ اگر x اور y بولین متغیرات ہیں تو درج ذیل ذاتی عناصر کو بذریعہ ٹروتھ ٹیبل ثابت کیجیے۔

(a) $\overline{x} + \overline{y}$ $\quad$ (b) $x + (x.y) = x$ $\quad$ (c) $x.(x + y) = x$

(d) $x + 1 = 1$ $\quad$ (e) $x.0 = 0$

3۔ درج ذیل فنکشنز کے لیے ٹروتھ ٹیبل بنائیے۔

(a) $f(x, y) = x.y + \bar{x}.y$ $\quad$ (b) $x.\bar{y} + \bar{x}.y$

4۔ x, y اور z کی دی گئی قیمتوں کے لیے درج ذیل بولین فنکشنز کی قیمت معلوم کیجیے۔

(a) $\bar{x}.y + \bar{x}.\bar{z} + x.\bar{y} \quad ; \quad x = 0, y = 1 \ , \ z = 0$

(b) $(\bar{x} + y).x + (\bar{y} + z); \quad x = 0, y = 1 \ , \ z = 1$

5- درج ذیل نتائج کو ثابت کیجیے اور دوسرے پن کا اصول لگاتے ہوئے ان نتائج کے دوہرے (duals) حاصل کیجیے۔

(a) $x + \overline{x} = x$ (b) $x + 0 = x$

(c) $\overline{x} \div x.y = \overline{x} + y$ (d) $\overline{x}.(y + z) = (\overline{x}.y) + (\overline{x}.z)$

6- درج ذیل منطقی گیٹس کی وضاحت کیجیے اور ان کے کام کو بذریعہ ٹرتھ ٹیبل ظاہر کیجیے۔

(a) AND (b) OR (c) NOT

7- درج ذیل بولین جملوں کو منطقی گیٹس کے ملاپ کے طور پر ظاہر کیجیے۔

$x.\overline{y} + \overline{x}.y$ (b) $x.\overline{y} + \overline{x}.y$ (c) $\overline{x} + \overline{x}.y$

8- K-میپ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل بولین فنکشنز کو مختصر کیجیے۔

(a) $f(x, y) = x + \overline{x}.y$ (b) $f(x, y, z) = \overline{x}.y.z + x.\overline{y} + \overline{x}.\overline{y}.z$.

(c) $(x, y, z) = x.z + \overline{x}.z.y$

9- خالی جگہ پُر کیجیے۔

(i) قانون مبادلہ بتلاتا ہے کہ a+b برابر ہے ______ کے۔

(ii) قانون تقسیمی بتلاتا ہے کہ ab + ac برابر ہے ______ کے۔

(iii) A+O برابر ہے ______ کے۔

(iv) صفر ______ کہلاتا ہے۔

(v) بولین الجبرا ______ پر آپریٹ ہوتا ہے۔

(vi) بولین الجبرا میں ذاتی عنصر بلحاظ (.) ______ ہے۔

(vii) $x + x =$ ______

(viii) ______ بولین فنکشنز کو حل کرنے کا بہت کارآمد طریقہ ہے۔

(ix) $\overline{x.y} =$ ______

(x) بولین الجبرا میں سٹینڈرڈ حاصل ضرب کو ______ کہتے ہیں۔

10- درج ذیل کو ملایئے۔

حاصل ضربوں کا مجموعہ	$(a+b)$
$x0=0$	مِن ٹرمز
مجموعوں کا حاصل ضرب	میکس ٹرمز
$a.b$	$x+1=1$

11- درست جواب کا انتخاب کیجیے:

(i) K-میپ استعمال ہوتا ہے

(a) بولین جملہ کی قیمت معلوم کرنے کے لیے (b) بولین جملے کو مختصر کرنے کے لیے

(c) a اور b دونوں کے لیے (d) کوئی بھی نہیں

(ii) ڈی مارگن کے قوانین بیان کرتے ہیں کہ

(a) $a.(b+c) = a.b + a.c$ (b) $a+(b+c) = (a+b)+c$

(c) $\overline{a+b} = \overline{a}.\overline{b}$ (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں

(iii) چار متغیرات کے ساتھ بولین فنکشن میں ہوتے ہیں

(a) 8 میکس ٹرمز (b) 16 میکس ٹرمز (c) 74 میکس ٹرمز (d) 32 میکس ٹرمز

(iv) دو متغیرات x اور y کے لیے آئیڈیمپوٹینٹ کا قانون بیان کرتا ہے

(a) $x.(x+y)=x$ اور $x+x.y=x+y$ (b) $\overline{\overline{x}}=x$

(c) $x+x=x$ اور $x.x=x$ (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں

(v) دو متغیرات x اور y کے لیے ابیزورپشن کا قانون بیان کرتا ہے کہ

(a) $y.y=y$ اور $x.x=x$ (b) $x.\overline{y}=\overline{y}.x$

(c) $x.(x+y)=x$ اور $x+(x.y)=x$ (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں

12۔ درج ذیل میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کیجیے:

(i) آئیڈیمپوٹینٹ کا قانون بتلاتا ہے کہ $x+1=1$

(ii) K-میپ بولین جملے کو مختصر کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔

(iii) $x+y+z$ ایک منٹرم ہے۔

(iv) بولین فنکشن میں دو سے زیادہ متغیرات نہیں ہو سکتے۔

(v) K-میپ سے ایک مینیمل حل نکل سکتا ہے اور نہیں بھی۔

(vi) دہرے پن کا اصول بیان کرتا ہے کہ . اور + باہم قابل تبدیل نہیں۔

(vii) جیسے جیسے بولین فنکشن میں متغیرات کی تعداد بڑھتی جاتی ہے K-میپ مزید مشکل ہوتا جاتا ہے۔

(viii) 5 متغیرات پر مشتمل بولین فنکشن میں 31 منٹرمز ہوں گی۔

(ix) دو، چار، چھ یا آٹھ کے گروپوں کے، K-میپ کو مختصر کرنے کے لیے 1s کی نشاندہی کی جاسکتی ہے۔

(x) انوولوشن (Involution) کا قانون بتلاتا ہے کہ $y+\overline{y}=1$

جوابات

9.	(i)	$b+a$	(ii)	$a.(b+c)$	(iii)	A	(iv)	جمعی ذاتی عنصر	(v)	بائنری اعداد
	(vi)	1	(vii)	x	(viii)	K- میپ	(ix)	$\overline{x}+\overline{y}$	(x)	منٹرم
11.	(i)	c	(ii)	c	(iii)	b	(iv)	c	(v)	c
12.	(i)	F	(ii)	T	(iii)	F	(iv)	F	(v)	F
	(vi)	T	(vii)	T	(viii)	F	(ix)	F	(x)	F